Correction TD : Commande optimale

Correction Ex 1

1) L'expression du critère et du Hamiltonien sont donnés par :

$$J(t_0) = \underbrace{\phi(X(T),T)}_{=0} + \int_{t_0}^{T} \underbrace{L(X(t),U(t),t)}_{x^2+u^2}\, dt$$

$$H(X(t),U(t),\lambda(t),t) = \underbrace{L(X(t),U(t),t)}_{x^2+u^2} + \lambda^T \underbrace{f(X(t),U(t),t)}_{\dot{x}}$$

2) Le Hamiltonien est donné par :

$$H = x^2 + u^2 + \lambda u$$

3) Les conditions d'optimalités sont :

1^er^ condition :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x(t),u(t),t) = u$$

2^ème^ condition donne le système adjoint :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2x \qquad \text{(a)}$$

3^ème^ condition de stationnarité :

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda \qquad \text{(b)}$$

4^ème^ condition :

Le temps final est connu $T = 1$ et l'état final $x(1)$ est libre d'où $dT = 0$ et $dx \neq 0$, la condition (6) impose alors :

$$\left(\underbrace{\phi_X}_{=0} + \underbrace{\psi_X^T \upsilon}_{=0} - \lambda\right)^T \underbrace{dX}_{\neq 0} + \left(\phi_t + \psi_t^T \upsilon + H\right)\underbrace{dT}_{=0} = 0$$

Soit $\lambda(T) = \lambda(1) = 0$

4) Le système à résoudre est :

$$\begin{cases} (a) \Rightarrow \dot{x} = -\dfrac{\lambda}{2} \\ (b) \Rightarrow \dot{\lambda} = -2x \end{cases}$$

Correction Ex2

1) C'est un problème de C.O linéaire quadratique à état final libre.

2) La représentation d'état du système est :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

avec : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) Le critère est de la forme :

$$J(t_0)=\frac{1}{2}X^T(3)S(3)X(3)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left(X^TQX+U^TRU\right)dt$$

avec $R=\frac{1}{2}$, $Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix} s_{11}(3) & s_{12}(3) \\ s_{21}(3) & s_{22}(3)\end{pmatrix}$

4) On a : $X^TQX=\begin{pmatrix} x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=2x_1^2+4x_2^2+2x_1x_2$

soit $\begin{cases} q_{11}=2 \\ q_{22}=4 \\ q_{21}+q_{12}=2\Rightarrow q_{12}=q_{21}=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $Q=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4\end{pmatrix}$ est définit positive.

D'autre part on a :

$$\frac{1}{2}X^T(3)S(3)X(3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1(3) & x_2(3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11}(3) & s_{12}(3) \\ s_{21}(3) & s_{22}(3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(3) \\ x_2(3)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_1^2(3)+2x_2^2(3)\right)$$

soit $\begin{cases} s_{11}(3)=1 \\ s_{22}(3)=2 \\ s_{12}(3)=s_{21}(3)=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $S(3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ est définit positive.

5) La résolution du problème de C.O linéaire quadratique à état final libre nécessite la détermination de l'équation de Ricatti suivant :

$$-\dot{S}=Q+A^TS+SA-SBR^{-1}B^TS,\quad t\prec 3$$

avec $S(t)=\begin{pmatrix} s_{11}(t) & s_{12}(t) \\ s_{21}(t) & s_{22}(t)\end{pmatrix}$

d'où le système d'équations différentielle couplées suivant :

$$\begin{cases} \dot{s}_{11}(t)=-2+2s_{12}^2(t) \\ \dot{s}_{12}(t)=-1-s_{11}(t)+2s_{12}(t)s_{22}(t) \\ \dot{s}_{22}(t)=-4-2s_{12}(t)-2s_{22}^2(t)\end{cases}$$

avec les conditions terminales : $\begin{cases} s_{11}(3)=1 \\ s_{22}(3)=2 \\ s_{12}(3)=s_{21}(3)=0\end{cases}$

6) Le gain de Kalman est alors :

$$G(t)=R^{-1}B^TS(t)=2\begin{pmatrix} 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11}(t) & s_{12}(t) \\ s_{12}(t) & s_{22}(t)\end{pmatrix}$$

d'où $G(t)=2\begin{pmatrix} s_{12}(t) & s_{22}(t)\end{pmatrix}$

Correction Ex3

A. Partie 1 :

1) Il s'agit d'un problème de CO. Linéaire quadratique à **état final fixe**.

2) On a :

$$H = \frac{1}{2}\left(X^T \underbrace{Q}_{=0} X + U^T \underbrace{R}_{=0} U \right) + \lambda^T \left(AX + BU \right)$$
$$= \frac{1}{2}u^2 + \left(\lambda_1 \quad \lambda_2 \right)\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

3) Les conditions d'optimalités sont :

1ère condition redonne les équations d'états du système.

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_1} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_2} = u \end{cases}$$

2ème condition donne le système adjoint :

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = A^T \lambda$$

soit : $\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \end{cases}$

3ème condition de stationnarité :

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0$$

d'où la commande $u(t) = -\lambda_2(t)$.

4) La solution du système adjoint donne le vecteur adjoint suivant :

On a : $\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} \lambda_1(t) = \lambda_1(T) \\ \lambda_2(t) = -\lambda_1(T)\left(t - T\right) + \lambda_2(T) \end{cases}$

NB :

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \Rightarrow \int_t^T \dot{\lambda}_2(t)dt = -\int_t^T \lambda_1(t)dt \Rightarrow \lambda_2(t) = -\lambda_1(t)\left(t - T\right) + \lambda_2(T)$$

5) D'après la condition de stationnarité on a :

$u(t) = -\lambda_2(t)$

D'où la commande optimale $u^*(t)$ est :

$$\boxed{u^*(t) = \lambda_1(T)\left(t - T\right) - \lambda_2(T)}$$

6) Les équations d'états sont données par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \lambda_1(T)(t-T) - \lambda_2(T) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} x_1(0) = \xi_1 \\ x_2(0) = \xi_2 \end{cases}$$

D’où :

$$x^*{}_2(t) - x_2(0) = \int_0^t \left[\lambda_1(T)(t-T) - \lambda_2(T)u\right]dt$$

Soit :

$$\boxed{x^*{}_2(t) = \frac{1}{2}\lambda_1(T)t^2 - \lambda_1(T)Tt - \lambda_2(T)t + \xi_2} \qquad (1)$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow x_1(t) - x_1(0) = \int_0^t x_2(t)dt$$

D’où :

$$\boxed{x_1^*(t) = \frac{1}{6}\lambda_1(T)t^3 - \frac{1}{2}\lambda_1(T)Tt^2 - \frac{1}{2}\lambda_2(T)t^2 + \xi_2 t + \xi_1} \qquad (2)$$

Sachant que :

$x_1(T) = 0$ et $x_2(T) = 0$, les conditions terminales $\lambda_1(T)$ et $\lambda_2(T)$ peuvent êtres déterminés à partir de (1) et (2) pour $t = T$.

$$\boxed{\lambda_1(T) = \frac{12}{T^3}\xi_1 + \frac{6}{T^2}\xi_2} \qquad (3)$$

$$\boxed{\lambda_2(T) = -\frac{6}{T^2}\xi_1 - \frac{2}{T}\xi_2} \qquad (4)$$

En remplaçant (3) et (4) dans (1) et (2), on trouve $x_1^*(t)$ et $x^*{}_2(t)$ en fonction des conditions terminales.

B. Partie 2 :

1) Il s’agit d’un problème de C.O à temps final libre.

2) Le Hamiltonien est donné par :

$$H(X(t), U(t), \lambda(t), t) = L(X(t), U(t), t) + \lambda^T f(X(t), U(t), t)$$

Soit : $H = \frac{1}{2}u^2 + 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

3) Détermination des conditions terminales :

La détermination de T nécessite l’utilisation des conditions terminales. En effet, le temps final T étant libre, $dT \neq 0$, à partir de la condition d’optimalité suivante :

$$\underbrace{\left(\phi_X + \psi_X^T \upsilon - \lambda\right)^T dX}_{\ddot{}=0} + \underbrace{\left(\phi_t + \psi_t^T \upsilon + H\right) dT}_{H(T)=0} = 0$$

Nous avons :

$$H(T) = 0$$

où encore sachant que $x_1(T) = 0$ et $x_2(T) = 0$:

$$\frac{1}{2}u^2(T)+1+\lambda_2(T)u(T)=0$$

or $u(T)=-\lambda_2(T)$, on obtient alors :

$$\boxed{\lambda_2^2(T)=2}$$

Connaissant $\lambda_2(T)$, (4) $\Rightarrow T$ et (3) $\Rightarrow \lambda_1(T)$.